PARAGRAAF 7.1 : HET VAASMODEL

LES 1 : KANSEN

HERHALEN KANSEN BEREKENEN

Hoe bereken je een kans. Dat kan op twee manieren :

(1) $Kans = \frac{Gunstige\ uitkomsten}{Totaal\ aantal\ uitkomsten}$ (kans op één experiment)

(2) P(…) = kans op één rijtje x het aantal rijtjes (meerdere experimenten)

VOORBEELD 1

In een vaas zitten 2 blauwe, 5 groene en 8 rode knikkers. Guus pakt 3 knikkers. Bereken de kans dat:

a. Hij 2 groene en een blauwe pakt.

b. Hij 3 verschillende kleuren heeft.

OPLOSSING 1

We zullen bij beide vragen beide oplossingen laten zien :

$$a.\quad (1)\quad P(GGB) = \frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{2}{13}\cdot\binom{3}{2} = 0,044$$

$$(2)\quad P(GGB) = \frac{\binom{5}{2}\binom{2}{1}\binom{8}{0}}{\binom{15}{3}} = \frac{10\cdot 2\cdot 1}{455} = 0,044$$

$$b.\quad (1)\quad P(RGB) = \frac{8}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{2}{13}\cdot\binom{6}{1} = 0,176$$

$$(2)\quad P(RGB) = \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{8}{1}}{\binom{15}{3}} = 0,176$$

VOORBEELD 2

Op een training zijn er 4 paarse, 3 witte en 8 rode hesjes. De trainer pakt uit de stapel 3 hesjes Bereken de kans dat:

a. hij 2 of 3 rode pakt.

b. hij minder dan 3 witte pakt.

OPLOSSING 2

a. $P(RR\cancel{R})$ of $P(RRR) = \dfrac{\binom{8}{2}\binom{7}{1}}{\binom{15}{3}} + \dfrac{\binom{8}{3}\binom{7}{0}}{\binom{15}{3}} = 0{,}554$

b. $P(\cancel{WWW})$ of $P(W\cancel{WW})$ of $P(WW\cancel{W}) = \dfrac{\binom{3}{0}\binom{12}{3}}{\binom{15}{3}} + \dfrac{\binom{3}{1}\binom{12}{2}}{\binom{15}{3}} + \dfrac{\binom{3}{2}\binom{12}{1}}{\binom{15}{3}} = 0{,}998$

PARAGRAAF 7.2 : DE COMPLEMENTREGEL

LES 1 : COMPLEMENTREGEL

DEFINITIE COMPLEMENTREGEL

- De complementregel gebruik je als de kans die je NIET wil berekenen veel makkelijker / korter is dan de kans die je wel wil berekenen.
- P (A) + P(niet A) = 1
  P (A) = 1 - P(niet A)

VOORBEELDEN

Je gooit met twee dobbelstenen. Je kijkt naar de som.

(1) P (minstens 3) = P(3) + P(4) + P(5) … + P(12)
= 1 – P(2) = $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

(2) P (geen 3) = P(2) + P(4) + P(5) … + P(12)
= 1 – P(3) = $1 - \frac{2}{36} = \frac{34}{36}$

VOORBEELD 1

Op een extra pupillentraining zijn 3 F-jes, 5 E-tjes en 2 D spelertjes. Voor de eerste oefening kiest de trainer 4 pupillen. Bereken de kans dat :

a. Er precies 2 D spelers zitten.
b. Minstens 1 F spelers zitten.

OPLOSSING 1

a. $P(DD\cancel{DD}) = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{112}{210}$

b. $P(minstens\ 1\ F) = 1 - P(geen\ F) =$

$$= 1 - P(\cancel{FFFF}) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{5}{6}$$

VOORBEELD 2

Bij een loterij zijn 90 loten verkocht. Er is een hoofdprijs van 80 euro en vijf tweede prijzen van 30 euro. Geoffrey heeft voor Michelle 4 loten gekocht.

Bereken de kans dat Michelle :

a. precies één prijs wint.

b. minstens één prijs wint.

OPLOSSING 2

a. $P(P\cancel{P}\cancel{P}\cancel{P}) = \dfrac{\binom{6}{1}\binom{84}{3}}{\binom{90}{4}} = 0{,}224$

b. P(minstens één prijs) $= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) =$

$$= 1 - P(0 \text{ prijzen}) = 1 - P(\cancel{P}\cancel{P}\cancel{P}\cancel{P}) = 1 - \frac{\binom{6}{0}\binom{84}{4}}{\binom{90}{4}} = 0{,}245$$

LES 2 : COMPLEMENTREGEL BIJ VASTE KANS

DEFINITIE

- P(meer experimenten) = kans op één rijtje x het aantal verschillende rijtjes
- Als je weet dat A 25% en B 75% kans heeft om een spel te winnen, dan geldt :

$$P(AABBB) = 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot aantal = 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^3 \cdot \binom{5}{2}$$

VOORBEELD 1

12% van de meisjes in de bovenbouw rookt. Je vraagt aan 9 meisjes of ze roken. Bereken de kans dat :

a. Er precies 3 roken.
b. Er precies 2 roken.
c. Er hoogstens 8 roken.
d. Er minstens 2 roken.

OPLOSSING 1

a. P(R R R N N N N N N) = $\binom{9}{3} \cdot 0{,}12^3 \cdot 0{,}88^6 = 0{,}0674$

b. P(R R N N N N N N N) = $\binom{9}{2} \cdot 0{,}12^2 \cdot 0{,}88^7 = 0{,}2119$

c. P(hoogstens 8R) = 1 – P(9R) = $1 - 0{,}12^9 = 1$

d. P(minstens 2R) = 1 – P(1R) – P(0R)

P(1R) = $\binom{9}{1} \cdot 0{,}12^1 \cdot 0{,}88^8 = 0{,}3884$
P(2R) = $0{,}88^9 = 0{,}3165$

P(minstens 2R) = 1 – P(1R) – P(0R) = 1 – 0,3884 – 0,3165 = 0,2951

PARAGRAAF 7.3 TREKKEN MET OF ZONDER TERUGLEGGEN

LES 1 : VASTE OF WISSELENDE KANS (MET OF ZONDER TERUGLEGGEN)

Er zijn twee soorten kansen :

(1) Vaste kans (met terugleggen)

Wanneer

- Gebruik je als de kans op 1e rode ≠ kans op 2e rode.
- Gebruik je als er vaste kans of percentage wordt gegeven. (=binomiale verdeling)
- $P(X = k) = \text{kans op één rijtje } \times \text{ het aantal rijtjes} = p^k(1-p)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$

(2) Wisselende kans (zonder terugleggen)

Wanneer

- Gebruik je als de kans op 1e rode ≠ kans op 2e rode.
- $P(X = k) = \frac{(\ )(\ )}{(\ )}$

VOORBEELD 1

Aan de olympische finale doen 3 Amerikanen, 2 Duitsers, 2 Nederlanders en 1 Fransman mee.

a. Is dit een vaste of wisselende kans?

Bereken de kans dat in de eerste 4 banen :

b. 2 Nederlanders zwemmen

c. Minstens 1 Amerikaan zwemt.

VOORBEELD 2

Willem doet roulette. Er zijn 37 nummers (0 t/m 36). Hij zet altijd in op getal 30. Hij speelt 8 keer.

a. Is dit een vaste of wisselende kans?

Bereken de kans dat

b. Hij precies 2 keer wint.
c. Hij minstens 1 keer wint.

OPLOSSING 1

a. Wisselend, want P(1e Duits) ≠ P(2e Duits)

b. P(NN~~NN~~)= $\frac{\binom{2}{2}\binom{6}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{15}{70}$

c. P(minstens 1 Am) = 1 – P(geen Am) = 1 – P(AAAA) = 1 - $\frac{\binom{3}{0}\binom{5}{4}}{\binom{8}{4}} = \frac{65}{70}$

OPLOSSING 2

a. Vast, want P(1e 30) = P(2e 30)

b. $P(30\ 30\ nnnnnn) = \binom{8}{2}\left(\frac{1}{37}\right)^2 \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^6 = 0{,}0174$

c. $P(minstens\ 1\ keer\ 30) = 1 - P(nnnnnnnn) = 1 - (\frac{36}{37})^8 = 0{,}1968$

PARAGRAAF 7.4 TOEVALSVARIABELEN

DEFINITIES

Kansverdeling = { Hoe zijn de kansen verdeeld over de mogelijkheden }

STAPPENPLAN KANSVERDELING

(1) Schrijf alle mogelijke uitkomsten op.

(2) Bereken bij elke mogelijkheid de kans.

(3) Controle : som van alle kansen moet 1 zijn.

VOORBEELD 1

Zef gooit 2 keer met een dobbelsteen. Hij kijkt naar het aantal zessen. Stel de kansverdeling op.

OPLOSSING 1

(1) X = { aantal zessen } = 0, 1 of 2.

(2) $P(X=0) = P(\cancel{66}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

$P(X=1) = P(6\cancel{6}) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times 2 = \frac{10}{36}$

$P(X=0) = P(66) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

(3) Controle $\frac{25}{36} + \frac{10}{36} + \frac{1}{36} = 1$ dus het klopt.

Vaak zetten ze dit dan in een tabel :

X	0	1	2
Kans	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

OPMERKING

De letter X heet ook wel de toevalsvariabele of de stochast.